

Stochastische Prozesse

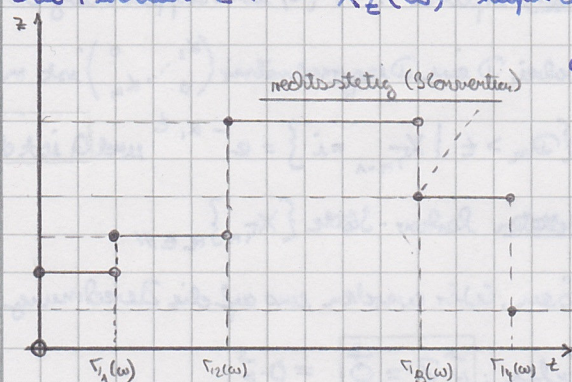
Teilbarkeit $\mathbb{R}_0^+ \ni \tau$ $\tau_i \in \mathbb{N}$
 Themen: Markov-Prozess (M-Prozess) und M-Kette (zeitdiskret)

- Poisson-Prozess (∞ Zustandsmenge) erst alle endlich
- Geburts- und Todesprozess - (m- vor- n-) Reparatursystem ($\leftrightarrow \mathbb{Z} \mathbb{R}$: W-kettell)
- Grenzwerte Zeit geht gegen ∞
- Bewertung
- Reduktion
- Glagorie Plasmawelle steht im Zustand mehrer Phas an des Gerates -> statt am Exp. Netz die Z von Exp.
- Erneuerungstheorie

1) Grundbegriffe

Def.: stochastischer Prozess $\{X_t: \Omega \rightarrow \mathbb{Z} \mid t \in \mathbb{T}\}$, Indexmenge $\mathbb{T} := \mathbb{N}_0$ bzw. $\mathbb{N}$ (zeitdiskret) oder $\mathbb{T} := \mathbb{R}_0^+$ (am. R)
 (stetig). $\{X_t: \Omega \rightarrow \mathbb{Z}\}$ homogen = Übergangswahrscheindlichkeit $p_{ij}(t) := \mathbb{P}\{X_{s+t} = j \mid X_s = i\}$
unter der Bedingung
zeitpunkt s ist
 vor i mal innerhalb der Zeit t ist unabhängig von s (≥ 0).

Die Funktion $t \mapsto X_t(\omega)$ heißt der zum Ausgang $\omega \in \Omega$ (des Zufallsexperiments) gehörige Pfad:



Die Zufallsvariable $\tau_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ ($n \in \mathbb{N}$) heißt n-te Ereigniszeit.

Markov-Eigenschaft ("Gedächtnislosigkeit"): $\mathbb{P}\{X_{t_n} = i_n \mid X_{t_0} = i_0, \dots, X_{t_{n-1}} = i_{n-1}\} = \mathbb{P}\{X_{t_n} = i_n \mid X_{t_{n-1}} = i_{n-1}\}$ für alle $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ und alle $i_0, i_1, \dots, i_n \in \mathbb{Z}$
2 Blasse

Bsp. aus der Praxis: a) Warteschlange (an einem Bedienungssystem); X_t = Anzahl der Wartenden zur Zeit t

b) Lagerhaltung: Vorat X_t zur Zeit t (inklusive Auffüllung des Vorrats nach bestimmten Kriterien)

Def.: Poisson-Prozess: Zählprozess, d. h. (monoton steigende Pfade) $X_0 \equiv 0$ und alle Pfade monoton steigend mit Sprüngen der Höhe Eins, für den die Pausenzeiten $D_n := \tau_n - \tau_{n-1}$ unabhängig sind und λ -exp. verteilt sind. $\mathbb{P}\{D_n > t\} = e^{-\lambda t}$, $\lambda > 0$
3.4.2. Verteilung des risikostroms

Anschauliches Bsp.: Strom, der an einem Strom verbleibenden Fische (Poisson-Strom); verschluckt ($\lambda < \lambda_p$ mit $p \in [0, 1]$ als W. Zeit dafür, dass ein verbleibender Fisch anbeißt)

Rechenregeln a) $P\{X_s = k | X_t = m\} = \binom{m}{k} \left(\frac{s}{t}\right)^k \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{m-k}$ für $0 \leq s \leq t, k, m \in \mathbb{N}_0$ (mit $\binom{m}{k} = 0$ für $k > m$)

Zahlenbeispiel: Wie groß ist die W.keit dafür, dass in der letzten halben Stunde ein Fisch angelassen hat, wenn in den letzten 2 Stunden fünf angelassen haben?

Antwort: $P\{X_1 = 1 | X_4 = 5\} = \binom{5}{1} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^1 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4 = 5 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{81}{256} = \frac{405}{1024} = 0,396 \approx 40\%$

b) $P\{X_t - X_s = m\} = P\{X_{t-s} = m\} \stackrel{\text{Zuwachs}}{\underset{\text{Verteilung}}{=}} \frac{\text{Poisson}}{m!} \frac{(\lambda(t-s))^m}{m!} e^{-\lambda(t-s)}, 0 \leq s < t$

Zahlenbeispiel: $\lambda = \frac{5}{2}$ (pro h) $\Rightarrow$ Im nächsten halben Std. ist die W.keit $P\{X_{0,5} = 1\} = \frac{5}{2} \cdot 0,5 \cdot e^{-\frac{5}{2} \cdot 0,5} \approx 35\%$

c) $P\{X_{s+t} = m | X_s = k\} = P\{X_t = m-k, (s, t \geq 0)\} = \frac{\lambda(t)^{m-k}}{(m-k)!} \cdot e^{-\lambda(t)}, 0 \leq k \leq m$

Es gibt nur endliche Zustandsmengen i. d. Z. $Z = \mathbb{N}_m \rightarrow$ Übergangsmatrix $P = (p_{ij}) = (p_{ij}(t)) (=P(t))$

Unterscheidung von Verteilungen $\vec{p}(t) = (p_1(t), \dots, p_m(t))$; $\left(\sum_{j=1}^m p_j = 1\right) = \vec{p}_0 \cdot P(t)$ in gegebenem Anfangszustand $\vec{p}_0$

Dabei ist $p_j(t)$ die W.keit dafür, sich zur Zeit t im Zustand j zu befinden ($\rightarrow$ Aufenthaltsw.keit)

Eigenschaften von P : a) $P(0) = E := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{p}(0) = \vec{p}_0 \cdot E = \vec{p}_0$

b) Im diskontinuierlichen Fall (d.h. Markov-Kette) setzen wir $Q := P(1)$, so dass $P(n) = Q^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow P\{X_n = j\} = \sum_{i \in \mathbb{N}_n} \vec{p}_0 \cdot Q^n$

c) Im stetigen Fall (d.h. Markov-Prozess) erfüllt $P = P(t)$ eine Differentialgleichung: $\dot{P} = P \cdot B$

mit Intensitätsmatrix $B := D(Q - E)$, wobei D eine Diagonalmatrix $\begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_m \end{pmatrix}$ ist mit unbedingten

Intensitäten $\alpha_i \geq 0$ definiert durch $P\{D_n > t | X_{n-1} = i\} = e^{-\alpha_i t}$ und Q ist die Übergangsmatrix

der im Markov-Prozess $\{X_t\}_{t \geq 0}$ angewendeten Markov-Kette $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

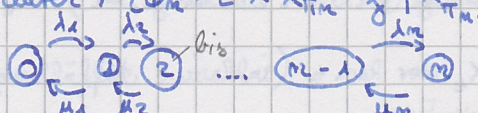
Bem.: Die DGL ist im Allgemeinen schwierig zu lösen. Wir werden uns auf die Berechnung von

Grenzwertungen $\vec{p} := \lim_{t \rightarrow \infty} \vec{p}(t)$ beschränken: $\vec{p} B = \vec{0} = 0 \cdot \vec{p}$

D.h. Gesucht sind die Eigenvektoren zum Eigenwert Null

Berechnung eines Markov-Prozesses Dichte Kongruenz der Intensitätsmatrix B anhand Gelegener Intensitäten

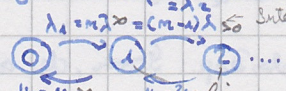
$0 \leq b_{ij}$ mit $i \neq j$ definiert durch $P\{D_n > t \wedge X_n = j | X_{n-1} = i\} = e^{-b_{ij} t}$. Diese b_{ij}

entspringen dem Rekell:  („geburts- und todesprozess“)

hierbei bedeutet $\lambda_j > 0$, dass man mit W.keit $e^{-\lambda_j t}$ mindestens die Zeit t vergeht für den Sprung

von Zustand $j-1$ in den Zustand j . Blocknet: m Komponenten mit Ausfallrate λ ; d.h. eine einzelne

3-Komponente ist zur Zeit t mit W.keit $e^{-\lambda t}$ intakt $\Rightarrow$ Gesamtausfallrate $= m \cdot \lambda$

X_t = Anzahl der ausgefallenen Komponenten zur Zeit t ;  Intensität $\lambda_1 = m \cdot \lambda = (m-1) \cdot \lambda \leq$

Reparaturrate μ eines einzelnen Reparatur $\Rightarrow k \in \mathbb{N}$. Reparatur besitzen die Reparaturrate μ_k

Festlegung: nur ein Reparatur repariert eine 3-Komponente

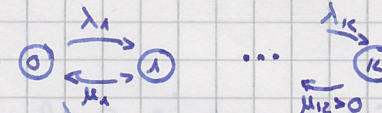
Zusammenhang zwischen b_{ij} und λ_i, μ_j : $b_{i+1,i} = \lambda_{i+1}$; $b_{i,i+1} = \mu_{i+1}$ ($i \in N_m$) alle anderen b_{ij} mit $i \neq j$ sind Null (da keine entsprechenden „Pfeile“ im „Intensitätsgraphen“). Insgesamt ist B damit durch die Bedingung festgelegt, dass alle Zeilensummen Null sind.

$$B = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ \mu_1 & -\lambda_1 - \lambda_2 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \mu_2 & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & -\mu_m & \lambda_m \end{pmatrix}$$

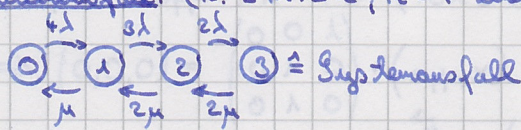
tridiagonal bei Geburts- und Todesprozess!

Prüfung: Welche Eigenschaft der Matrix bei GBT-Prozess = tridiagonal!

24.04.2014 Die Grenzverteilung eines Geburts- und Todesprozesses mit positiven Geburtsraten $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ und positiven

Todesraten $\mu_1, \dots, \mu_k$:  Für die zugehörige (eindeutig bestimmte) Grenzverteilung $\vec{p} = (p_0, p_1, \dots, p_k)$ gilt dann $p_n = \frac{\lambda_n}{\mu_n} p_{n-1}$ für alle $n \in N_k$

Zahlenbeispiel: ($k = m = 2$; $n = 4$ eines (k, m, n) -Reparatursystems)



gegeben: Quotient: $\lambda/\mu = 1/5 \Rightarrow p_1 = 4 \cdot \frac{1}{5} \cdot p_0$

$$p_2 = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot p_1; p_3 = 1 \cdot \frac{1}{5} \cdot p_2; p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1 \text{ (da } \vec{p} = (p_0, p_1, p_2, p_3) \text{ eine Verteilung)}$$

$$\Rightarrow p_0 + \frac{4}{5} p_0 + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot p_0 + \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot p_0 = 1 \Rightarrow p_0 = \frac{2 \cdot 5^3}{2 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 + 3 \cdot 4} = \frac{250}{522} \approx 0,479$$

$$p_1 = \frac{4}{5} \cdot \frac{125}{261} \approx 0,383; p_2 \approx 0,115; p_3 \approx 0,023$$

Zur Erinnerung: Für die Intensitätsmatrix $B := \begin{pmatrix} -4\lambda & 4\lambda & 0 & 0 \\ \mu & * & 3\lambda & 0 \\ 0 & 2\mu & * & 2\lambda \\ 0 & 0 & 2\mu & -2\mu \end{pmatrix}$ (mit verschwindenden Zeilensummen) gilt dann $\vec{p} \cdot B = \vec{0}$

Zugehöriges Zahlenbeispiel mit „Bewertung“: Reparaturkosten eines Technikers betragen 50 € pro h.

Frage: Welche Kostenrate hat dieses $(2, 2, 4)$ -Reparatursystem durchschnittlich

Antwort: (mittels „Bewertung“ der Grenzverteilung p) $\vec{p} \cdot \vec{\pi}$ mit „Bewertungsvektor“ $\vec{\pi} := (0, 50, 100, 100)$ (€/h)

$$\Rightarrow \text{Kostenrate } \vec{p} \cdot \vec{\pi} \approx 50 \cdot \frac{p_1}{p_0} + 100 \cdot \frac{p_2}{p_0} + 100 \cdot \frac{p_3}{p_0} \approx 32,95 \text{ €/h}$$

Allgemeines zum Thema Grenzverteilungen

Es geht hier um die Klassifizierung von (eingebetteten) Übergangsmatrizen bzw. von beliebigen stochastischen

Matrizen $Q = (q_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ d.h. $q_{ij} \geq 0$ für alle $i, j \in N_n$ und $\sum_{j=1}^n q_{ij} = 1$ für alle $i \in N_n$
 (Zeilensumme Eins (für i-te Zeile))

Def.: Eine stochastische Matrix Q heißt einfach, wenn nur eine Grenzverteilung $p \in \mathbb{R}^n$ existiert, d.h. $p_i \geq 0$,

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1, \vec{p} Q = \vec{p}. \text{ (Bsp. siehe oben Geburts- und Todesprozess mit } \mu_j > 0 \rightarrow \text{eingebettete}$$

Markov-Kette davon). Q heißt asymptotisch, wenn $Q^\infty := \lim_{m \rightarrow \infty} Q^m$ gilt (z.B. wenn $m \in \mathbb{N}$ existiert mit $Q^{m+1} = Q^m Q = Q^m$ ($= \lim_{m \rightarrow \infty} Q^m$))

Q heißt positiv (balanciert), wenn Q eine positive Grenzverteilung $(p_1, \dots, p_n)$ besitzt, d.h. $p_i > 0$

für alle $j \in N_m$. (siehe Bsp. oben! mit $p_0, p_1, p_2, p_3 > 0$).

Q heißt diagonalisierbar (auch im Allgemeinen für $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$), wenn Q in eine Diagonal $D(\cdot)$

überföhr ist, d.h. es existiert eine invertierbare Matrix $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $H Q H^{-1} = D$

Bem.: Diagonalisierbare Matrizen Q haben im asymptotischen Falle (d.h. Q^∞ existiert) den Vorteil, dass Q^∞

leicht zu berechnen ist: $D = H Q H^{-1} \Leftrightarrow H^{-1} D H = Q \Rightarrow Q^m = (H^{-1} D H)^m =$
 $= (H^{-1} D H) (H^{-1} D H) \dots (H^{-1} D H) = \boxed{H^{-1} D^m H = Q^m}$ wobei $\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \\ 0 & & d_m & \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} d_1^m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \\ 0 & & d_m^m & \end{pmatrix}$
 und $\lim_{m \rightarrow \infty} d^m = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq d < 1 \\ 1 & \text{für } d = 1 \end{cases}$

Zahlenbeispiel

$Q := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist diagonalisierbar. Berechnung von Eigenwerten (von links) $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$
 $= (1-\lambda)^2 \cdot \lambda \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ (einfache NST) $\vee \lambda = 1$ (doppelte NST)

Eigenwerte $\lambda = 0$ zum Eigenwert $\lambda = 0$: $(x, y, z) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (0, 0, 0) \Leftrightarrow (x, y+z, 0) = (0, 0, 0)$

$\Leftrightarrow x = 0, y = -z \rightarrow \text{EV: } (0, 1, -1) := \vec{u}_1$

$\vec{u}_1 \cdot Q = \vec{0} \cdot \vec{u}_1 = \vec{0}$

EV(en) zum EW $\lambda = 1$: $(x, y, z) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = (0, 0, 0) \Leftrightarrow (0, z, -z) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow z = 0$

linear unabhängige EVen: $\vec{u}_2 := (1, 0, 0) \quad \vec{u}_3 := (0, 1, 0) \rightarrow \vec{u}_2 \cdot Q = 1 \cdot \vec{u}_2 \text{ \& } \vec{u}_3 \cdot Q = 1 \cdot \vec{u}_3$

Frage: $H \cdot Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot H$ für $H := \begin{pmatrix} \vec{u}_1 \\ \vec{u}_2 \\ \vec{u}_3 \end{pmatrix}$, d.h. $H Q H^{-1} = D$

Bem.: H selbst muss nicht stochastisch sein

Weiter: $Q^\infty \stackrel{\text{Def.}}{=} \lim_{m \rightarrow \infty} Q^m : Q = q_{ij} \quad \left(\lim_{m \rightarrow \infty} q_{ij}^m \right)$

Hier im Bsp.: $Q^\infty = (H^{-1} D H)^\infty = H^{-1} \underbrace{D^\infty}_{=D} H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = Q (= Q^2)$ Hier liegt also der „stationäre Fall“

$Q^{m+1} = Q^m$ für $m = 1$

Frage: $Q \in A \cap D$ für die Menge A, D der asymptotischen bzw. diagonalisierbaren Matrizen.

Oder $Q \notin E$ und $Q \notin P$ für die Menge E, P der einfachen bzw. positiven Matrizen

$(1, 0, 0) \cdot Q = (1, 0, 0) =: \vec{p}_1 \quad ; \quad (0, 1, 0) \cdot Q = (0, 1, 0) =: \vec{p}_2 \Rightarrow \vec{p}_1 \text{ und } \vec{p}_2 \text{ sind zwei verschiedene Eigenvektoren von } Q \Rightarrow Q \notin E$

Für jede Verteilung $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$ mit $\vec{p}(Q) = \vec{p}$ gilt $p_3 = 0 \Rightarrow \vec{p}$ nicht positiv

Charakterisierung der Klassen A, D, E, P:

1) $Q \in A \iff$ Eins ist der einzige (komplexer) EW von Betrag Eins

Im Beispiel oben $EW \in 0$ und $1 \checkmark Q \in A$

2) $Q \in E \iff$ Das EW Eins ist (algebraisch) einfach, d.h. kommt als NST des charakteristischen

Polynoms nur einfach vor. Im Beispiel: EW 1 ist doppelte NST $\times \rightarrow Q \notin E$

2.4.3

3) Für ein $Q \in E$ gilt $Q \in A$ genau dann, wenn sich die Grenzverteilung $\vec{p}$ bei jeder (beliebigen) Startverteilung

$\vec{p}_0$ einstellt, d.h. $\lim_{m \rightarrow \infty} (\vec{p}_0, Q^m) = \vec{p}$. Im den Fall spricht man von einer ergodischen (stochastischen)

(Solange M besteht aus einfachen & asymptotischen Matrizen)

Matrix bzw. Markov-Kette. ($M := E \cap A$ ist also die Menge der ergodischen Matrizen)

Gegenbeispiel: a) $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \notin E$

b) $Q := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in E \setminus A \Rightarrow Q \notin M$

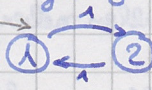
Das charakteristische Polynom ist $\lambda^2 - 1 = (\lambda + 1)(\lambda - 1)$

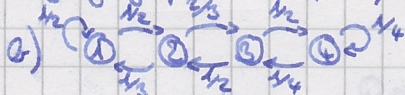
$\Rightarrow$ Eins ist einfache NST aber nicht die einzige von Betrag Eins (-1 auch!)

1/2) $Q \in E$ aber $Q \notin A \Rightarrow Q \notin M$

4) Die Menge $I := E \cap P$ der indecomponiblen (stoch.) Matrizen ist folgendermaßen charakterisiert:

Für beliebige (Zustände) $i, j \in \mathbb{N}_n$ existiert ein „Verbindungsweg“ von i nach j im ungerichteten

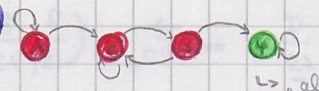
Übergangsgraphen. Bsp.: a) $G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ($n=2$) 



08.05.2014

Stochastische Matrizen $\xleftrightarrow{Q}$ Markov-Ketten
(Zeilensumme Eins)

Def.: Ein Zustand $i \in Z$ heißt transient oder auch flüchtig, wenn ein Zustand $j \in Z$ existiert mit $p_{ij}(m) > 0$ für ein $m \in \mathbb{N}$ und $p_{ji}(m) = 0$ für alle $m \in \mathbb{N}$. [also man kommt irgendwann von i nach j , aber nicht mehr zurück]. Ein nicht-transienter Zustand heißt rekurrent oder auch wiederkehrend. ($|Z| < \infty$).

Bsp. 1)  transient und rekurrenter Zustand
 $\hookrightarrow$ „absorbierender Zustand“

2 ist auch transient, weil man im $m=2$ Schritt von $i:=2$ nach $j:=4$ kommen kann, aber man kommt von „absorbierendem“ Zustand 4 nicht mehr weg.

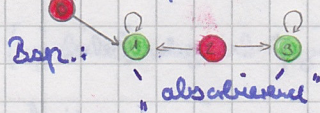
b) 

Frage: Gibt es immer mindestens einen rekurrenten Zustand? $\rightarrow$ Antwort: Ja (bei endlicher Zustandsmenge)

Gegenbeispiel in Fall $|\mathbb{Z}| = \infty$: Die Übergangsmatrix des Poisson-Prozesses lautet:

$Q := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$ der unendliche Übergangsgraph $\circ \xrightarrow{1} \circ \xrightarrow{1} \circ \xrightarrow{1} \dots \rightarrow$ alle Zustände sind transient.

Bem.: Für eine Grenzverteilung $(p_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ und einen transienten Zustand j gilt $p_j = 0$ (Langfristig ist die Aufenthaltswahrscheinlichkeit in einem transienten Zustand Null.)



Def.: Reziproke Zustände $i, j \in \mathbb{Z}$ mit $p_{ij} > 0$ für ein $m \in \mathbb{N}$ heißen äquivalent

Bem.: Dadurch ist tatsächlich eine Äquivalenzrelation definiert (ohne Beweis!). Die entsprechenden

Äquivalenzklassen heißen Rekurrenzklassen.

Bsp.: $Q := \begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.7 & 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.5 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.3 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0 & 0.1 & 0.2 & 0.4 \end{pmatrix}$

Waldmann - Stehr 29.2.23

da nur Nullen drin sind $\rightarrow$ nicht

$\rightarrow$ Zeilensumme = 1 $\rightarrow$ stochastische Matrix $\rightarrow$ Markov-Kette

über: $\mathbb{Z} = \mathbb{N}_7$

Rekurrenzklassen: $\mathcal{R}_1 := \{1, 2\}$; $\mathcal{R}_2 := \{3, 4, 5\}$

Warnung: Die Charakterisierung von Rekurrenzklassen durch minimale Hauptdiagonalelemente in Matrizen mit lauter Nullen neben sich schlägt nur bei geeigneter Nummerierung der Zustände (aber nur, dass die Rekurrenzklassen "Intervalle" sind) auf.

Ziel (auch hier): Berechnung der Grenzverteilung von Q

Satz (1.4.5) über Grenzverteilungen: In jeder Rekurrenzklass $R \subseteq \mathbb{Z}$ gibt es genau eine Grenzverteilung $\vec{\pi}_R$, für die alle Blockzeilen mit Index $j \in R$ positiv und sonst (d.h. für $\mathbb{Z} \setminus R$) Null sind. Alle Grenzverteilungen $\vec{\pi}$ ergeben sich als Blockkombination $\vec{\pi} = \sum_{R \in \mathcal{R}} \lambda_R \vec{\pi}_R$ der $\vec{\pi}_R$ für $\lambda_R \geq 0$ und $\sum_{R \in \mathcal{R}} \lambda_R = 1$. Hierbei ist $\mathcal{R}$ die Menge aller Rekurrenzklassen. [Indizierung auch mit $\mathbb{N}_{|\mathcal{R}|}$ anstelle von $\mathcal{R}$ möglich!]

Bsp. o.: i) Berechnung von $\vec{\pi}_{\mathcal{R}_1}$ für $\mathcal{R}_1 := \{1, 2\}$: $(x, y) \cdot \begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.7 & 0.3 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} (x, y)$

$\Leftrightarrow \begin{array}{cc|c} x & y & \\ \hline -0.8 & 0.7 & 0 \\ 0.8 & -0.7 & 0 \end{array} \Rightarrow x = \frac{7}{8} y \stackrel{x+y=1}{\Rightarrow} y = \frac{8}{15} ; x = \frac{7}{15} \Rightarrow \vec{\pi}_{\mathcal{R}_1} = \left(\frac{7}{15}, \frac{8}{15}, 0, 0, 0, 0, 0 \right)$

ii) Berechnung von $\vec{\pi}_{\mathcal{R}_2}$ für $\mathcal{R}_2 := \{3, 4, 5\}$: $(x, y, z) \cdot \begin{pmatrix} 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.6 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} = (x, y, z)$

$\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline -0.7 & 0.6 & 0 & \\ 0.5 & -1 & 0.4 & \\ 0.2 & 0.4 & -0.4 & \end{array} \Rightarrow y = \frac{7}{6} x$

$\rightarrow 0.4 z = \frac{7}{6} x - \frac{1}{2} x = \frac{5}{6} x \rightarrow z = \frac{5}{3} x$

$\rightarrow x + y + z = 1 \left(\frac{5}{3} + \frac{7}{6} + 1 \right) x = 1 \Rightarrow x = \frac{6}{23} \rightarrow y = \frac{7}{23} \rightarrow z = \frac{10}{23}$

$\vec{\pi}_{\mathcal{R}_2} = \left(0, 0, \frac{6}{23}, \frac{7}{23}, \frac{10}{23}, 0, 0 \right)$

alle weiteren Grenzverteilungen ergeben sich als $\lambda \vec{\pi}_{R_1} + (1-\lambda) \vec{\pi}_{R_2}$ für $\lambda \in [0,1]$
 -> damit wieder eine Konvergenz $\rightarrow Z=1$

Nächste Frage: Wie lauten die Grenzverteilungen $\vec{p}_i$ ($i \in \mathbb{Z}$) ausgehend vom Startzustand i?

(i.d. existiert $\vec{p}_i$ nicht; siehe Bsp $Q := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} ((1,0) \cdot Q^n)$ existiert nicht!) -> keine Grenzverteilung

Satz über Eintrittswahrscheinlichkeit: Für die Menge $\Gamma \subset \mathbb{Z}$ aller transienten Zustände existiert zu jedem $t \in \Gamma$ genau eine Verteilung $(f_{t,R})_{R \in \mathcal{R}}$ mit $f_{t,R} = \sum_{n \in \mathbb{N}} q_{t,n} + \sum_{s \in \Gamma} q_{t,s} \cdot f_{s,R}$ für alle $t \in \Gamma, R \in \mathcal{R}$.
 (Eintrittswahrscheinlichkeit von t in R)
 (Bem.: Menge der transienten Zustände)

Im Bsp o.: $\Gamma = \{0, 2\}, R_1 := \{1, 2\}, R_2 := \{3, 4, 5\}$

Bem.: Obiges LGS lässt sich für jedes $R \in \mathcal{R}$ separat lösen.

i) $f_{0,R_1} = 0 + 0,1 + 0,3 f_{0,R_1} + 0,1 f_{2,R_1}$
 ii) $f_{2,R_1} = 0,1 + 0,1 + 0,2 f_{0,R_1} + 0,1 f_{2,R_1}$
 (immer lösbar)

u	v	rechte Seite
0,7	-0,1	0,1
-0,2	0,6	0,2
0	4/7	8/35

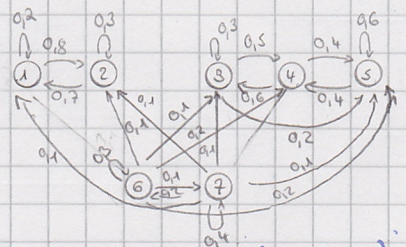
$\Rightarrow v = \frac{2}{5}$

$\rightarrow 0,7u = 0,1 + \frac{1}{15} \Rightarrow u = \frac{1}{5}$

Ergebnis: $f_{0,R_1} = \frac{1}{5}$; $f_{2,R_1} = \frac{2}{5}$
 (Eintrittswahrscheinlichkeit von Zustand 0 in Referenzklasse 1)

Da $(f_{0,R_1} | f_{0,R_2})$ bzw. $(f_{2,R_1} | f_{2,R_2})$ Verteilungen muss ergeben sich $f_{0,R_2} = \frac{4}{5}, f_{2,R_2} = \frac{3}{5}$

Aufstellen des LGS aus dem Intensitätsgraphen



$f_{0,R_1} = 0,1 + 0,3 f_{0,R_1} + 0,1 f_{2,R_1}$
 analog für f_{2,R_1}

Beantwortung obiger Frage (nach $\vec{p}_i$) im asymptotischen Fall: $\vec{p}_i = \vec{\pi}_{R_i}$ für alle $i \in \mathbb{Z} \in \mathcal{R}$

$\vec{p}_t = \sum_{R \in \mathcal{R}} f_{t,R} \vec{\pi}_R$ für alle $t \in \Gamma$

Im Bsp. s.o.: $\vec{p}_1 = \vec{p}_2 = \vec{\pi}_{R_1}$; $\vec{p}_3 = \vec{p}_4 = \vec{p}_5 = \vec{\pi}_{R_2}$

$\vec{p}_0 \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{5} \cdot \vec{\pi}_{R_1} + \frac{4}{5} \vec{\pi}_{R_2} = \frac{1}{5} \cdot (\frac{7}{15}, \frac{8}{15}, 0, \dots) + \frac{4}{5} (0, 0, \frac{6}{23}, \frac{7}{23}, \frac{10}{23}, 0, 0) = (\frac{7}{45}, \frac{8}{45}, \frac{24}{115}, \frac{28}{115}, \frac{40}{115}, 0, 0)$

$\vec{p}_2 \stackrel{(*)}{=} \frac{2}{5} \vec{\pi}_{R_1} + \frac{3}{5} \vec{\pi}_{R_2} = (\frac{14}{45}, \frac{16}{45}, \frac{18}{115}, \frac{21}{115}, \frac{6}{23}, 0, 0)$

Bem.: Im asymptotischen Fall ist $\vec{p}_i$ die i-te Zeile von $Q^\infty =$

$\frac{7}{45}$	$\frac{8}{45}$	$\frac{6}{23}$	$\frac{7}{23}$	$\frac{10}{23}$	0	0
$\frac{7}{45}$	$\frac{8}{45}$	"	"	"	0	0
$\frac{14}{45}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{18}{115}$	$\frac{21}{115}$	$\frac{6}{23}$	0	0
$\frac{14}{45}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{18}{115}$	$\frac{21}{115}$	$\frac{6}{23}$	0	0

13.05.2014 23 Ergodenmatrix: Existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass Q^n eine positive Spalte besitzt, so ist Q ergodisch, d.h.

asymptotisch und einfach. Existiert ein $t > 0$, so dass die Übergangsmatrix $P(t)$ lauter positive Einträge besitzt, so existiert $P(\infty)$ mit lauter gleichen positiven Zeilen $\vec{p}$, und es gilt

$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{p}_0 \end{pmatrix} P(t) = \vec{p}$ für alle Startverteilungen $\vec{p}_0$. $P(0) = \vec{E} = Q^0$

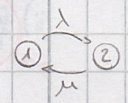
Bsp.: a) $Q := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$ ergodisch.
 ↳ 1. Spalte erfüllt nicht pos. Spalte, da 0 dabei

zur Erinnerung: Die Einfachheit ist asymptotisch gleichbedeutend mit Unabhängigkeit von der Startverteilung

$\Rightarrow Q^\infty$ hat lauter gleiche positive Zeilen $\vec{p}$, und es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} (\vec{p}_0 Q^n) = \vec{p}_0 Q^\infty = \vec{p}$ für jede Startverteilung $\vec{p}_0 = (p, 1-p) : p \in [0, 1]$
 $[\vec{p} Q = \vec{p} \Rightarrow \vec{p} = (\frac{5}{13}, \frac{10}{13})]$

(siehe Dsp. früh)

b) Der M-Prozess mit Identitätsmatrix $B = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}$ hat die Übergangsmatrix



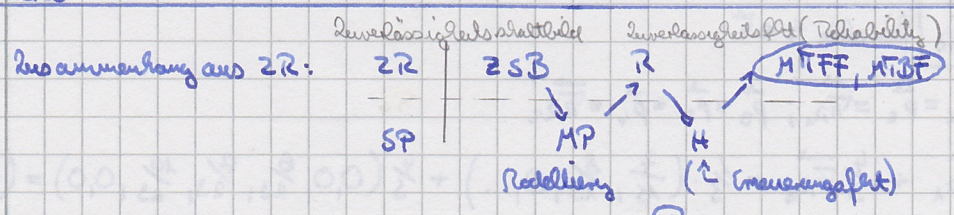
$P(t) = \frac{1}{\lambda + \mu} \left(\begin{pmatrix} \mu & \lambda \\ \mu & \lambda \end{pmatrix} - e^{-(\lambda + \mu)t} B \right), \lambda, \mu > 0$

zum 1. Eintrag: $\mu + e^{-(\lambda + \mu)t} \lambda$ ist z.B. für $t = 0$ ungleich Null. $\mu + e^0 \lambda = \mu + \lambda > 0$. Analoges Überlegen für den letzten Eintrag $\Rightarrow P(0)$ hat lauter positive Einträge

Betrachtung der „Neben-diagonalen“: $\mu - e^{-(\lambda + \mu)t} \mu > 0$ für alle $t > 0 \Rightarrow P(t)$ hat lauter positive Einträge für $t > 0$ ergodisch $\Rightarrow$ Der M-Prozess ist Ergodisch.

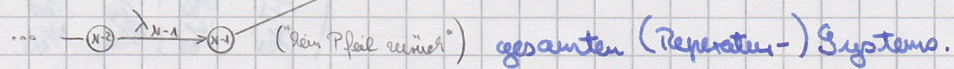
Berechnung der eindeutigen Grenzverteilung $\vec{p}$: $\vec{p} \cdot B = 0 \iff \vec{p} = (p, 1-p) \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Grenzverteilung
 $\iff -\lambda p + \mu(1-p) = 0 \iff \mu = (\lambda + \mu)p \iff p = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \Rightarrow \vec{p} = \left(\frac{\mu}{\lambda + \mu}, \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right)$

5 Erneuerungstheorie



Situation: bel. Zählprozess, dessen Pausenreihenfolge einen Erneuerungsprozess bilden, d.h. die D_n sind unabhängig und identisch verteilt. [Spezialfall: Poisson-Prozess]

Ereignisse werden hier „Erneuerungen“ genannt. Beschränkung auf einen Geburts- und Todesprozess mit „abschließendem“ Systemausfall, das immer wieder „neu“ aufgestellt wird, d.h. Erneuerung des



Technische Voraussetzungen: Dichtfkt. $f: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ der D_n stückweise stetig und $f(t) \leq c e^{-\alpha t} e^{\beta t}$ für geeignete Konstanten $c, \alpha, \beta > 0$

Def. der Erneuerungsfkt. $H: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ $H(t) := E N_t$ ist die Anzahl der zu erwartenden Erneuerungen bis zur Zeit t . Erneuerungsprozess

bedt. Bem.: $H(0) = 0$; $H(t) = \int_0^t h(x) dx$

Satz: Für die Dichtefkt. $f = -R'$ und $h := H'$ gilt die Erneuerungsgleichung $\hat{h}^{(x)} = \frac{f}{1-f}$ ^{Gesamterwartungswert}

Bem.: Dichtefkt. der Exponentialverteilung $f(t) := \lambda e^{-\lambda t} \Rightarrow \hat{f}(s) = \frac{\lambda}{s+\lambda} \Rightarrow \hat{h}(s) = \frac{\frac{\lambda}{s+\lambda}}{1 - \frac{\lambda}{s+\lambda}} = \frac{\lambda}{s}$

$\Rightarrow h(t) = \lambda$ für alle $t \geq 0 \Rightarrow H(t) = \int_0^t \lambda = \lambda t$ ($k=1$)

Fazit: Die Anzahl der Erneuerungen von λ -exponentialverteilten Geräten innerhalb der Zeit t beträgt erwartungsgemäß λt . ($k=1$)

Bem.: Im Fall der Erlang-Verteilung mit Dichtefunktion $f(t) := \frac{\lambda^k t^{k-1}}{(k-1)!} \cdot e^{-\lambda t}$ (Ordnung $k \in \mathbb{N}$;

$k=1 \rightarrow$ Exponentialverteilung) lässt H analog berechnen.

z.B.: $H(t) = \frac{1}{2} (\lambda t - \frac{1}{2} t + \frac{1}{2} e^{-2\lambda t})$ für $k=2$

3.3 Asymptotik ($t \rightarrow \infty$) für H

a) $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{H(t)}{t} = \frac{1}{\mu}$ (Elementares Erneuerungstheorem) mit $\mu := \int_0^\infty t f(t) dt$ als mittlere Lebensdauer des betrachteten Gerätes / Systems ^{= μ ist}

b) $\lim_{t \rightarrow \infty} (H(t+\mu) - H(t)) = \frac{\mu}{\mu} = 1$ für alle $\mu > 0$ (Blackwell'sches Erneuerungstheorem)

$\Rightarrow \frac{H(t)}{t} \approx \frac{1}{\mu}$ und $H(t+\mu) - H(t) \approx \frac{\mu}{\mu} = 1$ für große t <sup>so-
 $t \approx 100$ Datenreihen je nach Datenreihen</sup>

c) $\lim_{t \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{N_t - \frac{t}{\mu}}{\sigma \sqrt{\frac{t}{\mu^3}}} \leq x \right\} = \Phi(x)$ ($x \in \mathbb{R}$) mit μ wie oben und $\sigma := \sqrt{\int_0^\infty t^2 f(t) dt - \mu^2} > 0$

Folgerung: Um einen Erneuerungsprozess (für Geräte der Dichtefkt. f) mit Sicherheit $1-\alpha$ über den Zeitraum T zu gewährleisten, müssen

$N \geq \underbrace{\frac{T}{\mu}}_{\text{Erwarteter Wert}} + \underbrace{\Phi^{-1}(1-\alpha) \sigma \cdot \sqrt{\frac{T}{\mu^3}}}_{\text{Sicherheit}}$ ^{ausgeplant werden}

Dahlenbeispiel: ^{System} Gerät mit mittlerer Lebensdauer $\mu := 20$ (hr) und $\sigma := 3$ (hr). Wie viel Erneuerungen müssen für 2000 hr für 93% - Sicherheit eingeplant werden?

Lösungsweg: zu erwarten sind $H(2000) \approx \frac{2000}{20} = 100$. Zur Sicherheit muss noch $z_{0,93} \cdot 3 \cdot \sqrt{\frac{2000}{20^3}}$
 $\approx 2,33 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \approx 3,5$ Summiert werden.

$N \in \mathbb{N} \Rightarrow N \geq 100 + 4 = 104$

• Die Erneuerungsfkt. des $(n-1)$ -vor- n Reparatursystems mit abschließendem Systemausfall kommt

aus ZR (QS-Skript 4.5.2): $R(t) = \frac{1}{\sqrt{d}} (v_1 e^{r_1 t} - v_2 e^{r_2 t})$ mit $v_{1,2} := \frac{1}{2} (\pm \sqrt{d} - (2n-1)\lambda - \mu)$

und $d := \lambda^2 + 2(2n-1)\lambda\mu + \mu^2$

$\Rightarrow f(t) = -R'(t) = \frac{v_1 v_2}{\sqrt{d}} (e^{r_1 t} - e^{r_2 t}) = \frac{n(n-1)\lambda^2}{\sqrt{d}} (e^{r_1 t} - e^{r_2 t}) \geq 0 \Rightarrow v_2 < v_1 < 0$

$$\Rightarrow \hat{f}(s) = \frac{n(n-1)\lambda^2}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1}{s-\sqrt{\lambda_1}} - \frac{1}{s-\sqrt{\lambda_2}} \right) \quad \Rightarrow \hat{h}(s) = \frac{n(n-1)\lambda^2(\sqrt{\lambda_1}-\sqrt{\lambda_2})}{\Gamma(\alpha)(s-\sqrt{\lambda_1})(s-\sqrt{\lambda_2}) - (\sqrt{\lambda_1}-\sqrt{\lambda_2}) \cdot n(n-1)\lambda^2}$$

$$= \frac{n(n-1)\lambda^2}{(2n-1)\lambda + \mu} \cdot \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + (2n-1)\lambda + \mu} \right)$$

$$\Rightarrow h(t) = \frac{n(n-1)\lambda^2}{(2n-1)\lambda + \mu} \left(1 - e^{-((2n-1)\lambda + \mu)t} \right)$$

$$\frac{H(0)=0}{H'=h} \Rightarrow H(t) = \frac{n(n-1)\lambda^2}{((2n-1)\lambda + \mu)^2} \cdot \left[((2n-1)\lambda + \mu)t + e^{-((2n-1)\lambda + \mu)t} - 1 \right] \quad t \geq 0$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{H(t)} = \frac{((2n-1)\lambda + \mu)^2}{n(n-1)\lambda^2} \cdot \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{((2n-1)\lambda + \mu)t - 1} = \frac{((2n-1)\lambda + \mu)}{n(n-1)\lambda^2} \quad \left(\text{L'Hôpital} \right) = \frac{1}{t} = \text{MTTF}$$

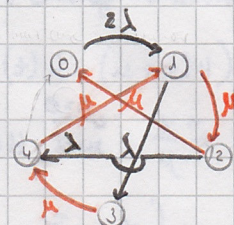
mit Reparaturrate μ und (Einzel-)Ausfallrate λ

05.06.2014 16 Die Erlangische Phasermethode

Definition: Die Summe von $k \in \mathbb{N}$ identisch zum Parameter $\lambda > 0$ verteilten Zufallsvariablen ist Erlang-verteilt mit Ordnung k . $\rightarrow$ Summe von Zeitphasen

Bsp.: 1 von 2-System mit der Ordnung $k := 2$ Erlang-verteilter Reparaturzeit vom Parameter $\mu > 0$ (ein Redundan)

Zustände	Beschreibung
0	Beide Stromkomponenten arbeiten
1	eine Stromkomponente ausgefallen; Reparaturphase 1
2	" " ; Reparaturphase 2
3	Beide Stromkomponenten ausgefallen; " 1
4	" " ; " 2



(Modellierung mittels extra Zustände entsprechend der Phasen)

konstante Einzelausfallrate $\lambda > 0$

$$\text{Zustandsmatrix } B = \begin{pmatrix} -2\lambda & 2\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda - \mu & \mu & \lambda & 0 \\ \mu & 0 & -\lambda - \mu & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & -\mu & \mu \\ 0 & \mu & 0 & 0 & -\mu \end{pmatrix}$$

Bestimmung der stationären Eigenverteilung mittels $\vec{p} \cdot B = \vec{0}$ im Fall der 'dritten Reserve' (mit λ);

Beispiel: $\lambda := 1$; $\mu := 2 \Rightarrow$

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Spalten zusammenfassen}} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{p} \cdot B = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} -p_0 + 2p_2 &= 0 & 1. \text{ Spalte} & p_0 = \frac{2}{3}p_2 \\ -3p_1 + 2p_2 + 2p_4 &= 0 & 2. \text{ Spalte} & p_1 = \frac{2}{3}p_2 \\ -5p_2 + 4p_4 &= 0 & & p_2 = \frac{4}{5}p_4 \\ 2p_3 - \frac{2}{3}p_4 &= 0 & & p_3 = \frac{1}{3}p_4 \end{aligned}$$

$$\rightarrow p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$$

$$p_4 \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \frac{1}{3} + 1 \right) = 1 \rightarrow p_4 = \frac{5}{26}$$

$$p_3 = \frac{5}{26} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{78} \quad p_2 = \frac{4}{26} = \frac{2}{13} \quad p_1 = \frac{2}{26} = \frac{1}{13} \quad p_0 = \frac{2}{26} = \frac{1}{13}$$

$$\text{allgemeine Formel: } p_0 = \left(1 + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} \right)^{-1} = \frac{1}{2}$$